4°/ On pose $\forall n \in \mathbf{N},\ a_n = u_n + v_n$.

a) Prouver que (a_n) est une suite constante.

b) Calculer alors l.

5°/ Exprimer en fonction de n, le terme général de (u_n) et (v_n).

Exercice 7 :

Soient les suites tels que : $U_0 = 1$ et $V_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$U_{n+1} = \frac{2U_nV_n}{U_n + V_n} \text{ et } V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}.$$

1°/ Démontrer que $0 < U_n < V_n$.

2°/ a) Démontrer que (U_n) est une suite croissante et que (V_n) est une suite décroissante.

b) Montrer que (U_n) et (V_n) sont deux suites convergentes vers la même limite l.

3°/ a) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N},\ U_n \cdot V_n = 2$.

b) En déduire la valeur de l.

Exercice 8 :

Soient les suites $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définis par :

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } V_n = U_n + \frac{1}{n!}$$

1°/ Montrer que (U_n) est une suite croissante et que (V_n) est une suite décroissante.

2°/ Montrer que $\forall p \in \mathbf{N},\ \forall q \in \mathbf{N}^*$ on a : $U_p \leq V_q$.

3°/ Montrer en utilisant le 2°/ que (U_n) et (V_n) sont deux suites convergentes vers la même limite.

Exercice 9 :

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par :

$$U_0 = 1\ ,\ U_1 = 2\ ,\ \forall n \in \mathbf{N},\ U_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} U_n$$

1°/ Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$: $U_{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n}}$

2°/ Soit $n \in \mathbf{N}$ et $V V_n = (n+1) U_n U_{n+1}$.

Montrer que (V_n) est une suite constante.

3°/ Exprimer U_{2n-1} en fonction de n.